APPLICATION OF NUMERICAL METHODS TO SOLVE NONLINEAR EQUATIONS FOR SEA WAVE MODELING

José Costa Vigil
josecvig@hotmail.com
Profesor: Luis Paihua
lpaihua@mail.urp.edu.pe

Curso: CE0607 Análisis Numérico
2011-01

Escuela Profesional de Ingeniería Electrónica

Universidad Ricardo Palma

Abstract : In this work we find the solution of the equation of a stationary wave by the methods learn in the course of Numeric Methods.
We applied Newton´s Method to find the solution of the equation and we find that because of the periodic nature of the given wave equation we have infinite solutions, being the lower value the fundamental and most important solution.
We corroborate the found answer applying the secant method and obtaining the same results.
After we obtain the answer by the methods mentioned before we realize that the answer repeats it itself by adding λ*n, where n is a discrete number and λ is the wavelength of the stationary sea wave, which is quite logical because it is a periodic function. This work was realized as open ended problem project .

***Key words** – Stationary wave, Newton´s Method.*

I. INTRODUCIÓN

Ola

En física, una onda es una propagación de una perturbación de alguna propiedad de un medio, por ejemplo, densidad, presión, campo eléctrico o campo magnético, que se propaga a través del espacio transportando energía. El medio perturbado puede ser de naturaleza diversa como aire, agua, un trozo de metal o el vacío.

Las olas son ondas que se desplazan por la superficie de mares, océanos, ríos, lagos, canales, etc.

Explicación física más clara

Las olas del mar son ondas sísmicas (es decir, perturbaciones de un medio material) de las llamadas superficiales, que son aquellas que se propagan por la interfaz (la frontera) entre dos medios materiales. En este caso se trata del límite entre la atmósfera y el océano. Cuando pasa una ola por aguas profundas (a una profundidad mayor a 1/20 de su longitud de onda), las moléculas de agua regresan casi al mismo sitio donde se encontraban originalmente. Se trata de un vaivén con una componente vertical, de arriba a abajo, y otra longitudinal, la dirección de propagación de la onda.
Hay que distinguir dos movimientos. El primero es la oscilación del medio movido por la onda, es un movimiento circular. El segundo es la propagación de la onda, que se produce porque la energía se transmite con ella, trasladando el fenómeno con una dirección y velocidad, llamada en este caso velocidad de onda.
En realidad se produce un pequeño desplazamiento neto del agua en la dirección de propagación, dado que en cada oscilación una molécula o partícula no retorna exactamente al mismo punto, sino a otro ligeramente más adelantado. Es por esta razón por la que el viento no provoca solamente olas, sino también corrientes superficiales.
Conforme el oleaje se aproxima hacia la costa, sus características se ven afectadas cuando la profundidad

del agua comienza a ser menor que la semilongitud de onda, y por los efectos de la refracción. Cuando la ola se encuentra con un obstáculo en la superficie, se modifica según los fenómenos de difracción y reflexión; también se puede modificar por un obstáculo sumergido, alterándose el movimiento orbital de las partículas hasta una cierta profundidad.

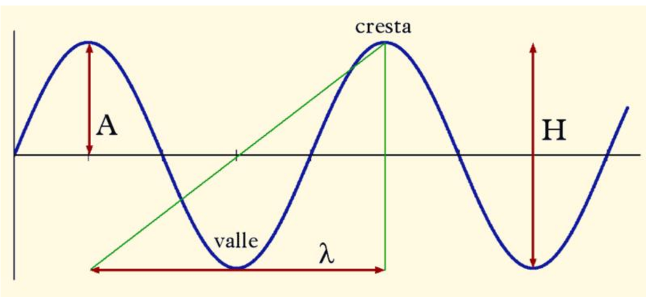
Parámetros

La parte más alta de una ola es su cresta, y la parte más profunda de la depresión entre dos olas consecutivas se llama valle. A la distancia entre dos crestas se le denomina longitud de onda (λ) y a la diferencia de altura entre una cresta y un valle se le llama altura de la ola. La amplitud es la distancia que la partícula se aparta de su posición media en una dirección perpendicular a la de la propagación. La amplitud vale la mitad de la altura. La pendiente (δ) es el cociente de la altura y la longitud de onda: $\delta = H / \lambda$

Se llama período (τ) al tiempo que transcurre entre el paso de dos crestas consecutivas por el mismo punto. La velocidad de onda (también llamada velocidad de fase o celeridad), es decir la velocidad de propagación, se calcula dividiendo la longitud de onda por el período:

$c = \lambda / \tau$

En aguas profundas (>λ/2) la velocidad de onda es proporcional a la longitud de onda, en aguas muy superficiales (<λ/2) por el contrario depende sólo de la profundidad.



Parámetros de las olas. A=amplitud. H=altura. λ=longitud de onda.

Método de Newton

En análisis numérico, el método de Newton (conocido también como el método de Newton-Raphson o el método de Newton-Fourier) es un algoritmo eficiente para encontrar aproximaciones de los ceros o raíces de una función real. También puede ser usado para encontrar el máximo o mínimo de una función, encontrando los ceros de su primera derivada.

Descripción del método

El método de Newton-Raphson es un método abierto, en el sentido de que su convergencia global no está garantizada. La única manera de alcanzar la convergencia es seleccionar un valor inicial lo suficientemente cercano a la raíz buscada. Así, se ha de comenzar la iteración con un valor razonablemente cercano al cero (denominado punto de arranque o valor supuesto). La relativa cercanía del punto inicial a la raíz depende mucho de la naturaleza de la propia función; si ésta presenta múltiples puntos de inflexión o pendientes grandes en el entorno de la raíz, entonces las probabilidades de que el algoritmo diverja aumentan, lo cual exige seleccionar un valor supuesto cercano a la raíz. Una vez se ha hecho esto, el método linealiza la función por la recta tangente en ese valor supuesto. La abscisa en el origen de dicha recta será, según el método, una mejor aproximación de la raíz que el valor anterior. Se realizarán sucesivas iteraciones hasta que el método haya convergido lo suficiente.

Sea f : [a, b] -> R función derivable definida en el intervalo real [a, b]. Empezamos con un valor inicial x0 y definimos para cada número natural n

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Donde f ' denota la derivada de f.

Nótese que el método descrito es de aplicación exclusiva para funciones de una sola variable con forma analítica o implícita cognoscible. Existen variantes del método aplicables a sistemas discretos que permiten estimar las raíces de la tendencia, así como algoritmos que extienden el método de Newton a sistemas multivariables, sistemas de ecuaciones, etc.

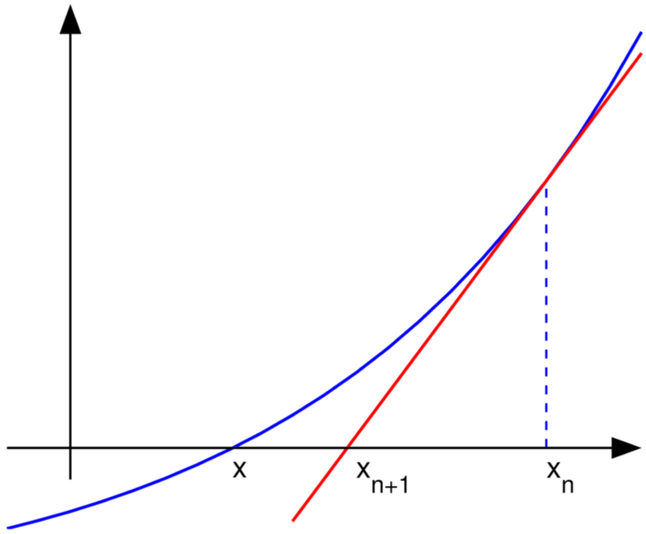


Ilustración de una iteración del método de Newton (la función f se demuestra en azul y la línea de la tangente está en rojo). Vemos que xn + 1 es una aproximación mejor que xn para la raíz x de la función f.

Método de la secante

En análisis numérico el método de la secante es un método para encontrar los ceros de una función de forma iterativa.

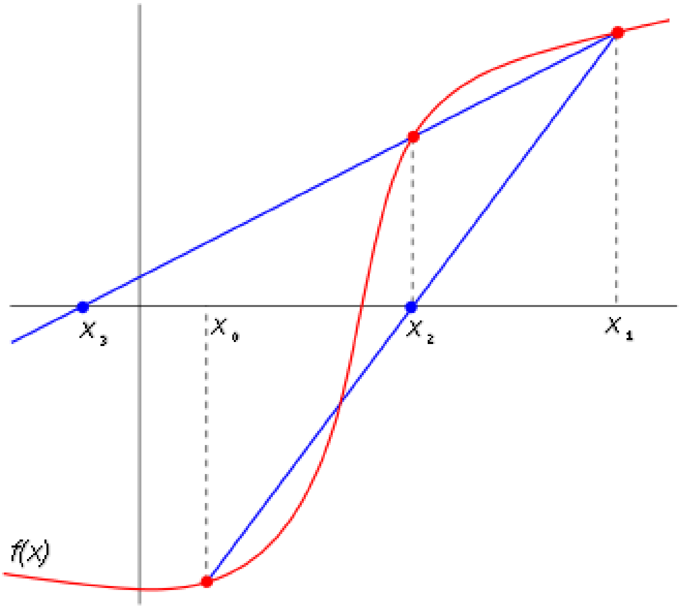
Es una variación del método de Newton-Raphson donde en vez de calcular la derivada de la función en el punto de estudio, teniendo en mente la definición de derivada, se aproxima la pendiente a la recta que une la función evaluada en el punto de estudio y en el punto de la iteración anterior. Este método es de especial interés cuando el coste computacional de derivar la función de estudio y evaluarla es demasiado elevado, por lo que el método de Newton no resulta atractivo.

En otras palabras, el método de la secante es un algoritmo de la raíz de investigación que utiliza una serie de raíces de las líneas secantes para aproximar mejor la raíz de una función f. El método de la secante se puede considerar como una aproximación en diferencias finitas del método de Newton-Raphson. Sin embargo, este método fue desarrollado independientemente de este último.

El método se define por la relación de recurrencia:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n).$$

Como se puede ver, este método necesitará dos aproximaciones iniciales de la raíz para poder inducir una pendiente inicial.



Dos primeras iteraciones del método de la secante.

II. PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

La ecuación de una ola estacionaria reflejada en un puerto está dada por:

$$h = h_0\left[sen\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\cos\left(\frac{2\pi tv}{\lambda}\right) + e^{-x}\right]$$

Para $\lambda = 16$, t=12, v=48, h=0.4h_0, (40% de la altura inicial)

Movimiento de las moléculas de agua, en la zona superficial del mar, provocado por la acción del viento. En este movimiento, que es originariamente circular, no hay desplazamiento horizontal de dichas moléculas ni de la masa de agua por ellas constituida, aunque sí lo hay del movimiento ondulatorio generado por ese movimiento molecular. Este tipo de olas, que se originan en alta mar, se conocen con el nombre de 'olas libres' u 'olas estacionarias'.

Cuando una ola se aproxima a la costa, el movimiento típico del mar libre, movimiento circular, se transforma, por rozamiento con el fondo, en un movimiento elíptico; la cresta de la ola avanza por este motivo más deprisa que su punto opuesto en la vertical y se produce un desplazamiento horizontal de la masa de agua que provoca la ruptura de la ola al llegar a la costa.

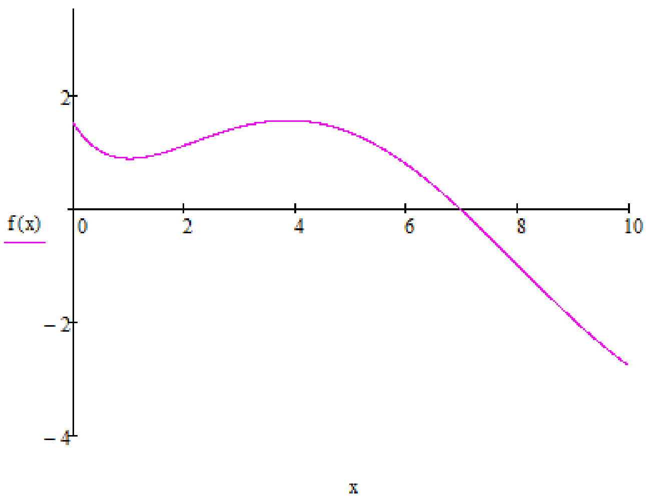

Estela de ola formada por el paso de un barco.

Para nuestro caso nos dan la ecuación respectiva de la ola junto con varios parámetros de esta tales como la longitud de onda, las alturas respectivas, la velocidad, el tiempo y nos piden hallar la distancia donde rompe la ola dada por x.
Debido a la presencia de por ejemplo la función logarítmica estamos en presencia de una ecuación no lineal y se procederá a hallar las soluciones mediante los métodos anteriormente descritos.

III. DESCRIPCIÓN DE LA SOLUCIÓN

Para hallar la solución dada se pueden aplicar varios métodos enseñados en el curso de Análisis Numérico, tales como de Aproximaciones Sucesivas, El método de Newton, Método de la secante, etc. Para hallar nuestra solución se uso el método de Newton debido a su rápida convergencia en hallar la solución así como el más fácil de entender y aplicar, se comprobaron dichos resultados con el método de la secante obteniéndose los mismos valores de x.

Determinando la solución positiva más pequeña:



La solución más pequeña positiva se encuentra en el intervalo [5,10].

$$a = 5 \qquad b = 10 \qquad x_0 = \frac{a+b}{2}$$

Se halla la solución positiva más pequeña a través de 2 métodos.

I. Usando el método de Newton

$$\frac{d}{dx}f(x) = -2..5e^{-x} + 0.98174\cos(0.3927x)$$

Se halla un punto inicial correspondiente:

$$c = x_0 = 7.5$$

$$f(c) * f'(c) = 0.493$$

Como f(c)*f'(c) > 0, se tiene un punto inicial y se puede proseguir.

$$k = 1 \ldots n \quad donde \quad n = 10$$

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{\frac{d}{dx}f(x_{k-1})}$$

x =

	0
0	6.5
1	6.978852791803652
2	6.954779208670931
3	6.954731290074158
4	6.954731289881505
5	6.954731289881505
6	6.954731289881505
7	6.954731289881505
8	6.954731289881505
9	6.954731289881505
10	6.954731289881505

II. Usando el método de la secante

Se escogen otras variables y se expresa la correspondiente expresión para el método de la secante modificado desarrollado en clase:

$$t_0 = \frac{a+b}{2}$$

$$h = 0.001$$

$$k = 1 \ldots n \quad donde \quad n = 10$$

$$t_k = t_{k-1} - \frac{f(t_{k-1})}{\frac{f(t_{k-1}+h) - f(t_{k-1})}{h}}$$

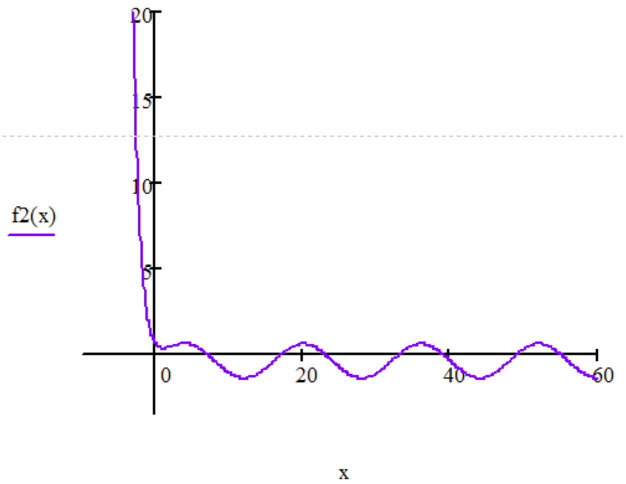
t =

	0
0	6.5
1	6.978791373048833
2	6.954780929582512
3	6.9547312942513555
4	6.954731289881872
5	6.954731289881505
6	6.954731289881505
7	6.954731289881505
8	6.954731289881505
9	6.954731289881505
10	6.954731289881505

IV. RESULTADOS

En el problema de la onda estacionaria se tiene una ecuación periódica debido a la presencia de la variable independiente x dentro de una función seno, por lo tanto vamos a tener múltiples respuestas debido a la periodicidad de esta función.

$$f2(x) := \left(\sin\left(\frac{2\pi \cdot x}{\lambda}\right)\cdot\cos\left(\frac{2\pi \cdot t \cdot v}{\lambda}\right) + e^{-x}\right) - 0.4$$



La solución a la ecuación de la ola estacionaria estará dada en los puntos donde f(x) tienen a cero. Para valores de x donde la función periódica f(x) es igual a cero se tendrán las soluciones para x.

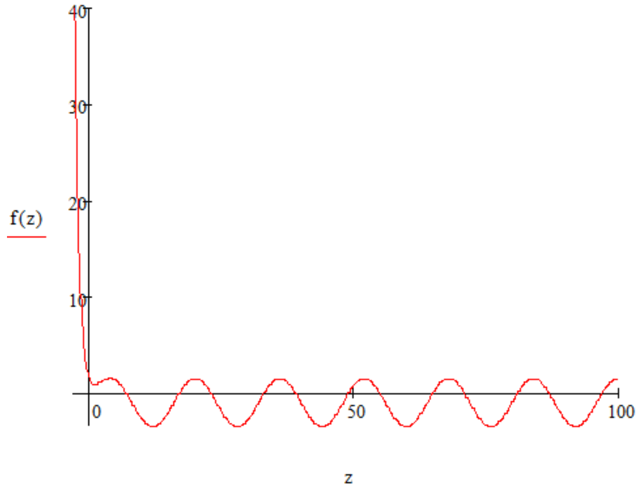
De la gráfica se observa

para valores negativos o pequeños de x e-x tiene un efecto considerable mientras que cuando x tiende a valores mayores e-x tiende a cero por lo que no influye mayor en la solución, mientras que por lo tanto la función quedaría de la forma:

f(x) = A*sin(K*x) - 0.4

Donde se ve claramente que van haber infinitas soluciones de x para lo cual f(x) = 0.

Se tendrán infinitas soluciones de x para f(x) = 0, ya que la función seno desplazada 0.4 hacia abajo corta al eje horizontal cada π radianes, donde 2π es el período de la onda.



En matemática, una función es periódica si los valores de la función se repiten conforme se añade a la variable independiente un determinado período, o sea:

$$f(x) = f(x + P)$$

, donde P es el período.

Las funciones trigonométricas, tales como la función seno o coseno, son casos típicos de funciones periódicas, en las que su período es de 360 grados.

Al tener la función periódica K seno(2πx/λ) todos los valores donde sea x=x' el valor donde la función tiende a cero y nos da la solución, para valores de (2π/λ)(x'+λ*n), se tendrán nuevos valores de x''= x'+λ*n donde n=0,1,2,3,4...N.

V. CONCLUSIONES

Debido a la naturaleza oscilatoria de las ondas del mar, se tendran multiples respuestas sin embargo se considerara a la solución fundamental a la solución mas pequeña positiva.

Se tienen infinitos cruces de la función por cero debido a que para grandes valores de x la función exponencial tienen a cero, quedando solo la ecuación seno multiplicada por una constante y desplazada para abajo en 0.4, por lo tanto corta al eje horizontal 2 veces en cada periodo.

Al hallar las 2 primeras soluciones, se puede ver que las demás soluciones son simplemente soluciones iguales desplazadas en 2π radianes.

Esto se da debido a que $sen(x)=sen(x+2\pi)$.

En este trabajo se pudo comprobar la eficacia de estos método iterativos, encontrando satisfactoriamente la respuesta y se vio que a pesar de tener términos no lineales como la función exponencial, estos sólo prevalecen para una región del problema, que en nuestro caso para hallar la solución prácticamente no tiene mayor efecto en los valores finales.

VI. REFERENCIAS

[1] Chapra S. & Canales R. / Métodos numéricos para ingenieros. / Edit. Mc Graw Hill . N.Y. 1994, 641p.

[2] Aljama C. Tomás , Cadena M. Miguel , Charleston V. , Miguel , Yañez S. Oscar / Procesamiento digital de señales. / Universidad Autónoma Metropolitana / México 1998, páginas 244p.